ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THÚY HẰNG

VỀ TỔNG CỦA NGHỊCH ĐẢO CÁC SỐ FIBONACCI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THÚY HẰNG

VỀ TỔNG CỦA NGHỊCH ĐẢO CÁC SỐ FIBONACCI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Ngô Văn Định. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các thầy cô trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K10C Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo Tỉnh Bắc Ninh, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Lý Thường Kiệt - TP Bắc Ninh - Tỉnh Bắc Ninh đã tạo điều kiện cho tôi về mọi mặt để tham gia học tập và hoàn thành khóa học.

Thái Nguyên, năm 2018

Nguyễn Thị Thúy Hằng

Mở đầu

Dãy số Fibonacci $\{F_n\}$ là dãy số được rất nhiều người biết đến, quan tâm và nghiên cứu. Có rất nhiều tính chất thú vị của dãy số này đã được tìm ra. Với n là một số nguyên không âm, số Fibonacci F_n được định nghĩa bởi $F_0 = 0, F_1 = 1$ và công thức truy hồi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$.

Mục đích của luận văn này là tìm hiểu và trình bày lại các kết quả sau đây :

Đầu tiên, Luận văn trình bày lại kết quả của Ohtsuka và Nakamura [1], công bố năm 2008, về tổng vô hạn của nghịch đảo các số Fibonacci: với mọi $n \geq 2$, ta có

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-2}, \text{ nếu } n \text{ chẵn}, \\ F_{n-2} - 1, \text{ nếu } n \text{ lẻ}, \end{cases}$$

trong đó $\lfloor \cdot \rfloor$ kí hiệu hàm sàn. Năm 2015, Wang và Wen [2] mở rộng kết quả này cho trường hợp hữu hạn: với $m \geq 3$ và $n \geq 2$, ta có

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-2}, \text{ nếu } n \text{ chẵn}, \\ F_{n-2} - 1, \text{ nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Tiếp theo, Luận văn trình bày một số kết quả của Wang và Yuan [3], công bố năm 2017, về tổng đan dấu của nghịch đảo các số Fibonacci có dạng

$$\sum_{k=n}^{mn} \frac{(-1)^k}{F_{ak+b}},$$

trong đó $a \in \{1, 2, 3\}$ và $b < a$.

Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung chính của Luận văn được trình bày thành 3 chương:

• Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi trình bày định nghĩa dãy Fibonacci và một số đẳng thức, bất đẳng thức về số Fibonacci được sử dụng trong các chương tiếp theo.

• Chương 2: Tổng của nghịch đảo các số Fibonacci. Mục đích của Chương này là trình bày lại kết quả của Ohtsuka và Nakamura [1] và kết quả của Wang và Wen [2].

• Chương 3: Tổng đan dấu nghịch đảo các số Fibonacci. Mục đích của Chương này là trình bày lại kết quả của Wang và Yuan [3].

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương mở đầu này, chúng tôi sẽ trình bày lại khái niệm về dãy Fibonacci và một số tính chất của dãy này được sử dụng trong các chương tiếp theo.

1.1 Dãy Fibonacci

Định nghĩa 1.1.1. Dãy số Fibonacci, ký hiệu bởi $\{F_n\}$, được định nghĩa bởi hệ thức truy hồi sau:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2,$$

với các giá trị ban đầu $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Theo định nghĩa, ta có dãy Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

Số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci được xác định bởi công thức Binet dưới đây:

Mệnh đề 1.1.2 (Công thức Binet)**.** *Với* $n \in \mathbb{Z}, \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *và* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, *ta có*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

1.2 Một số tính chất của các số Fibonacci

Mệnh đề 1.2.1 ([2, Bổ đề 2.1])**.** *Với số nguyên* $n \geq 1$, *ta có*

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, ta có

$$F_1^2 - F_0F_2 = 1^2 - 0.1 = 1 = (-1)^0.$$

Giả sử, đẳng thức đúng với $n > 1$, ta chứng minh đẳng thức đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} &= (F_n + F_{n-1})^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 - F_nF_{n+1} \\
&= 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_nF_{n+1} \\
&= 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n(F_n + F_{n-1}) \\
&= F_{n-1}^2 + F_nF_{n-1} - F_n^2 \\
&= F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) - F_n^2 \\
&= F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 \\
&= -(-1)^{n-1} = (-1)^n.
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 1.2.2 ([2, Bổ đề 2.1])**.** *Với hai số nguyên dương m, n, ta có*

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo m. Với $m = 1$, ta có

$$F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_nF_2 = F_{n-1} + F_n.$$

Với $m = 2$, ta có

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_nF_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n+1} + F_n.$$

Giả sử, đẳng thức đúng với $m > 2$, ta chứng minh đẳng thức đúng với $m + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
F_{n+m+1} &= F_{n+m-1} + F_{n+m} \\
&= F_{n-1}F_{m-1} + F_nF_m + F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \\
&= F_{n-1}\left(F_{m-1} + F_m\right) + F_n\left(F_m + F_{m+1}\right) \\
&= F_{n-1}F_{m+1} + F_nF_{m+2}.
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1.2.3 ([2, Hệ quả 2.2]). *Với số nguyên $n \geq 1$, ta có*

$$F_{2n} = F_n \left(F_{n-1} + F_{n+1} \right). \tag{1.3}$$

Chứng minh. Áp dụng đẳng thức (1.2) với $m = n$, ta có

$$F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_n \left(F_{n-1} + F_{n+1} \right).$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1.2.4 ([2, Hệ quả 2.2]). *Với mọi số nguyên không âm n, ta có*

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 0$, ta có

$$F_1 = 1 = 0 + 1 = F_0^2 + F_1^2.$$

Với $n = 1$, ta có

$$F_3 = 2 = 1 + 1 = F_1^2 + F_2^2.$$

Với $n = 2$, ta có

$$F_5 = 5 = 1 + 4 = F_2^2 + F_3^2.$$

Giả sử, đẳng thức đúng với $n > 2$, ta chứng minh đẳng thức đúng với $n + 1$. Thật vậy, sử dụng đẳng thức (1.3) và theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 &= \left(F_{n-1} + F_n\right)^2 + \left(F_n + F_{n+1}\right)^2 \\
&= F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + F_n^2 + F_n^2 + 2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 \\
&= F_{n-1}^2 + F_n^2 + 2F_n \left(F_{n-1} + F_{n+1} \right) + F_n^2 + F_{n+1}^2 \\
&= F_{2n-1} + 2F_{2n} + F_{2n+1} \\
&= F_{2n+1} + F_{2n+2} \\
&= F_{2n+3}.
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

Tương tự như vậy, ta có các hệ quả dưới đây:

Hệ quả 1.2.5 ([2, Hệ quả 2.2])**.** *Với mọi* $n \geq 1$, *chúng ta có*

$$F_{2n+1} = F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+2}. \tag{1.5}$$

Hệ quả 1.2.6 ([2, Bổ đề 2.3])**.** *Với mọi* $n \geq 1$, *chúng ta có*

$$F_{2n+1} = F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n. \tag{1.6}$$

Hệ quả 1.2.7 (Tính chất d'Ocagne)**.** *Với hai số nguyên* m, n *và* $m \geq n$*, ta có*

$$F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n = (-1)^n F_{m-n}. \tag{1.7}$$

Mệnh đề 1.2.8 ([2, Bổ đề 3.1])**.** *Với số nguyên* $n \geq 1$*, ta có*

$$F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_{n+2} = (-1)^{n-1}. \tag{1.8}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_{n+2} &= F_nF_{n+1} - F_{n-1}(F_n + F_{n+1} \\ &= F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1} - F_{n-1}F_{n+1} \\ &= F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) - F_{n-1}F_{n+1} \\ &= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}. \end{aligned}$$

Sử dụng (1.1) ta được kết quả cần chứng minh. □

Một cách tổng quát ta có mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.2.9 ([3, Bổ đề 5])**.** *Giả sử* a, b, c, d *là bốn số nguyên dương với* $a+b = c+d$ *và* $b \geq max\ \{c, d\}$*. Khi đó, ta có*

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)^{a+1}F_{b-c}F_{b-d}. \tag{1.9}$$

Mệnh đề 1.2.10 ([2, Bổ đề 2.4])**.** *Nếu* $n \geq 6$ *thì ta có*

$$F_{n-2}F_{n-1} > F_{n+1}. \tag{1.10}$$